CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$.

1°) Montrer que cette intégrale existe. On notera f(x) sa valeur.

2°)a) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n n!\, x^n + R_m(x) \quad \text{où}$$

$$R_m(x) = (-1)^{m+1} (m+1)!\, x^{m+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{m+2}} dt.$$

On pourra avoir recours à une intégration par parties.

b) Montrer que

$$|R_m(x)| \leq (m+1)!\, x^{m+1}.$$

c) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $m \geq 1$, on peut trouver un intervalle [0,A] que l'on précisera, tel que :

$$x \in [0,A] \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{m} (-1)^n n!\, x^n - f(x) \right| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

3°) On pose $u_n(x) = (-1)^n n!\, x^n$. Pour quelles valeurs positives de x, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle convergente ?

4°) On veut approcher le nombre f(0,1), (valeur de f(x) pour x=0,1), par une somme partielle $\sum_{n=0}^{n=m} u_n(x)$. Trouver $m = m_0$ pour que cette somme partielle approche f(0,1) à moins de 10^{-3} près.

Exercice 2 :

On se donne une application linéaire $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Soit une application linéaire $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, telle que

$$fgf=f \qquad (1)$$

en notant multiplicativement la composition des applications.

1°)a) Montrer que fg est un projecteur de $\mathbf{R}^m$ et gf un projecteur de $\mathbf{R}^n$.

b) Montrer que Im(fg)=Im(f).

c) Montrer que Ker(gf)=Ker(f).

d) Montrer que Im(I_n-gf)=Ker(f), où l'on note I_n l'application identité de $\mathbf{R}^n$.

2°) Montrer que si un vecteur b de $\mathbf{R}^m$ vérifie fg(b)=b, alors l'équation f(x)=b admet une solution dont la forme générale est

$$x=g(b)+h(z), \quad \text{avec z quelconque dans } \mathbf{R}^n$$

et où h est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qu'on explicitera.

3°) Dans cette question on a n=5 et m=6. On veut appliquer ce qui précède à la recherche des solutions $x \in \mathbf{R}^5$ du système f(x)=b donné par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 4x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 = 18 \end{cases} \qquad (2)$$

a) Montrer que l'endomorphisme g représenté par la matrice

$$G = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie (1). (On pourra raisonner matriciellement)

b) En déduire la forme générale des solutions du système (2).

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle suivante par rapport à la fonction $x : t \in \mathbf{R} \to x(t) \in \mathbf{R}$

$$x''(t) + 2ax'(t) + (1+a^2)x(t) = 0 \qquad (1)$$

où a>0 est un paramètre réel.

1°)a) Montrer que l'ensemble des solutions de (1) forme un sous-espace vectoriel V de l'espace vectoriel des fonctions 2 fois continûment dérivables sur $\mathbf{R}$.

b) Déterminer une base B={u,v} de V.

2°) On définit l'application de $V \times V \to \mathbf{R}$ par

$$(x_1, x_2) \in V \times V \to \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x_1(t)x_2(t)e^{2at}dt \qquad (2)$$

a) Montrer que cette application définit un produit scalaire sur V. On notera (.|.) ce produit scalaire et ||.|| la norme associée.

b) Calculer la valeur de $(x_1|x_2)$ en fonction des coordonnées (λ_1,μ_1) de x_1 et (λ_2,μ_2) de x_2 dans B et de a.

c) Pour une fonction $x \in V$ de coordonnées (λ,μ) dans B, calculer $\|x\|$.

d) Déterminer une base orthonormée de V.

3°) On veut montrer qu'une suite de Cauchy de V converge au sens de la norme euclidienne vers un élément de V.

a) Citer un théorème du cours répondant exactement à la question.

b) Démontrer directement la convergence d'une suite de Cauchy de V vers un élément de V en utilisant le fait que $\mathbf{R}$ est complet et ce qui précède.

4°)a) Montrer que

$$(x_1, x_2) \in V \times V \to \int_0^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt$$

définit un autre produit scalaire sur V. On notera $(.|.)_1$ ce produit scalaire, V_1 le sous-espace V muni de ce produit scalaire et $\|.\|_1$ la norme associée.

b) Calculer l'expression de $(x_1|x_2)_1$ en fonction des coordonnées (λ_1,μ_1) de x_1 et (λ_2,μ_2) de x_2 dans B et de a.

Exercice 4 :

On considère pour t>0, les équations différentielles

$$y''(t)+\Phi(t)y(t) = 0 \qquad (1)$$

et

$$v''(t)+\Omega(t)v(t) = 0 \qquad (2)$$

où Φ et Ω sont deux fonctions de classe $C^0(\mathbf{R}_+^*)$. On notera y et v les solutions non identiquement nulles de (1) et (2), respectivement.

On appellera fonction *oscillante* une fonction ayant une infinité de zéros distincts. On suppose que les solutions de (1) sont oscillantes. On fait de plus l'hypothèse que $\forall t > 0, \quad \Omega(t) > \Phi(t)$.

On note t_1 et t_2 deux zéros consécutifs de y.

1°) a) Montrer que y' change de signe dans l'intervalle $[t_1,t_2]$.

b) Montrer que l'on ne peut avoir $y'(t_1)=0$.

c) Montrer que si $y(t)>0$ (resp. <0) pour $t \in]t_1,t_2[$, alors, $y'(t_1)>0$ (resp.<0) et $y'(t_2)<0$ (resp.>0).

2°) Montrer que si y et v sont solutions respectivement de (1) et (2), on a :

$$\int_{t_1}^{t_2}(y(t)v''(t)-v(t)y''(t))dt+\int_{t_1}^{t_2}(\Omega(t)-\Phi(t))v(t)y(t)dt = 0.$$

On note respectivement I et J ces deux intégrales.

3°) On suppose que pour $t \in [t_1,t_2]$, on a, ou bien $v(t)>0$, ou bien $v(t)<0$.

a) Montrer que I et J ont le même signe.

b) En déduire que v est oscillante.

4°) On examine les deux équations différentielles :

$$y''(t)+9y(t)=0 \qquad (3)$$

et

$$v''(t)+a^2(1+t^2)v(t)=0 \qquad (4)$$

où a est une contante.

a) Montrer que les solutions de (4) sont oscillantes pour des valeurs de a que l'on déterminera.

b) Donner, pour ces valeurs de a, la longueur maximale des intervalles définis par les zéros consécutifs de v.

5°) On considère pour t>0, l'équation différentielle

$$t^2y''(t)+\omega^2y(t)=0 \qquad (5)$$

où ω est une constante réelle.

a) Montrer en faisant le changement de variable $\tau: x \in \mathbf{R} \to t=\tau(x)=e^x \in \mathbf{R}_+^*$ que la fonction Y définie par $Y(x)=y(\tau(x))$, pour $x \in \mathbf{R}$, vérifie une équation différentielle que l'on déterminera.

b) En déduire des valeurs de ω pour lesquelles les solutions y de (5) sont oscillantes pour t>0.

c) En déduire une condition sur $\Omega(t)$ pour que les solutions de (2) soient oscillantes.